Estratto da Bollettino dei docenti di matematica, nr. 50. Maggio 2005. 69-76

L'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche. Il caso degli enti primitivi della geometria

Silvia Sbaragli[1]

In this article we highlight the importance of different semiotic representations (Duval, 1993) taking as mathematical "objects" the geometrical primitive entities. We highlight wrong ideas related to these entities found in students and teachers and their probable causes.

1. L'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche

In questo articolo faremo riferimento al pensiero di Duval che ha mostrato come in Matematica l'acquisizione concettuale di un oggetto passa necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche. Tale riflessione è stata presentata nei celebri articoli del 1988 (a, b, c) e nel successivo lavoro del 1993 dove l'Autore sostiene come non ci sia **noetica** (acquisizione concettuale di un oggetto) senza **semiotica** (rappresentazione realizzata per mezzo di segni), mettendo così in evidenza l'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche.

A sostegno di questa affermazione, D'Amore (2003) afferma:

- *ogni concetto matematico ha rinvii a "non-oggetti"; dunque la concettualizzazione non è e non può essere basata su significati che poggiano sulla realtà concreta; in altre parole in Matematica non sono possibili rinvii estensivi;*
- *ogni concetto matematico è costretto a servirsi di rappresentazioni, dato che non vi sono "oggetti" da esibire in loro vece o a loro evocazione; dunque la concettualizzazione deve necessariamente passare attraverso registri rappresentativi che, per vari motivi, soprattutto se sono a carattere linguistico, non possono essere univoci;*

[1] N.R.D. - Dipartimento di Matematica - Università di Bologna - Italia
A.S.P. - Locarno - Svizzera

• *si parla più spesso in Matematica di "oggetti matematici" che non di "concetti matematici" in quanto in Matematica si studiano preferibilmente oggetti piuttosto che concetti; «la nozione di oggetto è una nozione che non si può non utilizzare dal momento in cui ci si interroga sulla natura, sulle condizioni di validità o sul valore della conoscenza» (Duval, 1998).*

Come continua a sostenere D'Amore (2003), *«per Duval la nozione di concetto diventa secondaria, mentre ciò che assume carattere di priorità per l'Autore è la coppia (segno, oggetto)»*. Dell'importanza del segno parla anche Vygotskij in un passo del 1962, citato in Duval (1996), nel quale si dichiara che non c'è concetto senza segno. Assumendo tutto questo come vero, ne consegue che occorre didatticamente fare molta attenzione alla scelta del sistema di segni, che rappresentano l'oggetto matematico che si vuole far apprendere ai propri allievi; un'attenzione che è spesso sottovalutata o data per scontata. Sempre in D'Amore (2003) si riporta il pensiero di Duval che sostiene come presso alcuni studiosi di didattica si scorge una riduzione del **segno** ai **simboli convenzionali** che connotano direttamente e isolatamente degli oggetti, ma che possono portare a misconcezioni dato che diventano rappresentanti unici di un dato registro, e questo a nostro parere è ciò che avviene per gli enti primitivi della geometria.

In effetti, sono ormai diversi anni che le nostre ricerche si sono indirizzate nel rilevare modelli erronei in allievi e in insegnanti costruiti su immagini-misconcezioni riguardanti gli enti primitivi della geometria (Sbaragli, 2004). Le diverse misconcezioni evidenziate sono spesso da ritenere "evitabili" (D'Amore, Sbaragli, 2005; Sbaragli, 2005), essendo imputabili direttamente alle scelte della trasposizione didattica effettuate dall'insegnante e dalla noosfera (libri di testo, programmi, riviste, …).

Tra queste scelte didattiche che possono generare misconcezioni "evitabili", vi è quella di fornire sempre e solo univoche rappresentazioni convenzionali, che portano l'allievo, e a volte l'insegnante stesso, ad attribuire agli enti primitivi della geometria proprietà che risultano erronee nel contesto della matematica.

Ad esempio, per quanto riguarda il punto matematico, alla domanda posta dal ricercatore: *Che cos'è per te un punto in matematica?*, alcuni allievi ed insegnanti rispondono attribuendo a questo ente matematico

una forma "tondeggiante", che corrisponde con quella di un cerchio o di una sfera a seconda se si sta parlando del piano o dello spazio.
- *«È un punto rotondo che forma le linee»* (terza media).
- *A.: «Il punto è sferico»* (insegnante di scuola elementare).
[L'ultima affermazione è di un insegnante che stava facendo costruire ai propri allievi poliedri "scheletrati" con pongo e stuzzicadenti e che pretendeva che i vertici dei solidi fossero realizzati esclusivamente di forma sferica, essendo a suo parere una proprietà caratteristica del punto matematico].
Come si rileva dai casi seguenti, alcuni allievi ed insegnanti associano all'idea erronea legata alla forma univoca dei punti matematici anche una certa dimensione variabile:
- *«Per me il punto può essere una cosa grandissima o microscopico perché è come un cerchio di diverse misure»* (quarta elementare).
- *«Per me il punto è un cerchio di diametro variabile»* (insegnante di scuola elementare).
È, in effetti, la dimensione variabile del punto matematico, l'erronea caratteristica sulla quale si concentra maggiormente l'attenzione degli intervistati, sostenendo come questa possa variare a seconda della rappresentazione scelta. Di questo sono testimonianza le seguenti affermazioni che mettono in evidenza la presunta coincidenza tra rappresentazione e concetto:
- *«Non si sa ancora bene che cos'è un punto però per me è solo un punto su un foglio che può essere di diverse dimensioni»* (quarta elementare)
- *«Il punto è una parte di piano indeterminato, perché può avere varie dimensioni, che costituisce l'inizio, la fine o entrambi di un segmento, una retta etc»* (terza media)
Anche tra gli insegnanti si riscontra in alcuni casi la stessa idea erronea; nel parlare dei punti matematici un insegnante di scuola elementare afferma: *N.: «… Anche se si fanno piccoli piccoli i punti, più di tanti non ce ne stanno in una retta».*
Le distorte idee intuitive sopra evidenziate, concernenti la forma e la dimensione del punto matematico, vincolano l'apprendimento matematico successivo, continuando a scontrarsi durante l'intera carriera scolastica, e non solo, con gli altri saperi (si pensi alle proprietà topologiche di densità e continuità) (Arrigo, D'Amore, 1999, 2002).

Il punto è quindi percepito e riferito all'unica rappresentazione che viene comunemente fornita dalla noosfera: un "tondino" lasciato su un foglio, di diametro variabile, avente una certa dimensione. La stessa cosa avviene per la retta matematica alla quale viene associata una linea continua, di spessore variabile, diritta, rappresentata con tre puntini iniziali e tre finali. Anche quest'ultima scelta univoca può comportare conseguenze di questo tipo: alla domanda posta dal ricercatore: *«Immagina di spiegare ad un tuo compagno che cos'è la retta in matematica. Tu che cosa gli diresti?»*, uno studente di quinta liceo scientifico risponde associando la rappresentazione al concetto: *«Gli direi che è tre puntini, un segmento, tre puntini»*.
Capita quindi spesso che, a complicare l'apprendimento degli oggetti matematici, incidano le decisioni prese dall'insegnante, derivanti dalle proposte della noosfera, di fornire all'allievo giorno dopo giorno, sempre e solo univoche rappresentazioni convenzionali che vengono così accettate ciecamente dall'allievo a causa del contratto didattico instaurato in classe (Brousseau, 1980a, 1980b, 1986) e del fenomeno di "scolarizzazione" (D'Amore, 1999b).
Di conseguenza, nessuno ha il coraggio di "osare" uscendo da queste rappresentazioni che vengono percepite dagli insegnanti, e indirettamente dagli allievi, come le uniche plausibili e possibili.
A questo proposito risulta interessante la seguente conversazione avuta con un insegnante di scuola elementare, il quale ritiene univoca e necessaria la scelta di individuare un punto matematico con i soliti modelli di forma "tondeggiante" proposti dalla noosfera:
A.: «Non credo che ci siano altri modi per rappresentare un punto se non quello di toccare leggermente un foglio con una penna»
R.: «Non ti viene in mente nient'altro? Con i tuoi allievi come fai?»
A.: «Se mi chiedi come lo rappresento, per forza per farlo faccio un piccolo segnetto sulla lavagna, ma se intendi anche che cosa dico quando ne parlo, di solito dico di considerare un granello di sabbia o un granello di sale».

Dalle idee distorte degli insegnanti sopra evidenziate, emerge come spesso la scelta di lasciare gli enti primitivi solamente all'aspetto "personale" senza passare al loro aspetto "istituzionale" (Chevallard, 1992; D'Amore 2001, 2003; Godino, Batanero, 1994) non è una scelta didattica consapevole, mirata ad aggirare questioni assai delicate legate

al tentativo di "definire" tali oggetti, ma deriva dall'accettazione passiva di misconcezioni consolidate che si sono trasformate in modelli erronei posseduti dagli insegnanti stessi.
G.: *«Sono trent'anni che dico ai miei bambini che il punto è quello che si disegna con la matita, non potrò cambiare adesso. E poi ritengo che sia proprio questo il vero significato di punto. Perché, non è più così?»* (insegnante di scuola elementare). Curiosa è la domanda posta dall'insegnante G.: «*Perché, non è più così?»,* che mette in evidenza non solo false convinzioni legate all'idea di punto, ma anche personali credenze relative all'idea di matematica [sulla visione personale degli insegnanti e sulle loro "filosofie implicite" si veda Speranza (1992), sui credo ideologici invece rimandiamo a Porlán et al. (1996), sull'importanza dell'epistemologia nella formazione degli insegnanti si veda D'Amore (2004)]. Dalla domanda posta da questo insegnante non emerge un sapere concettuale, ma un sapere legato alla trasposizione didattica che solitamente viene proposto dalla noosfera tramite libri di testo per studenti. Non vi è quindi distinzione per l'insegnante G. tra un concetto matematico e la sua trasposizione, scaturita da una particolare scelta didattica: i due aspetti rappresentano per lui un tutt'uno.
Eppure, per non creare forti fraintendimenti come quelli rilevati, occorre innanzitutto che l'insegnante sia a conoscenza del significato "istituzionale" dell'oggetto matematico che intende far apprendere, in secondo luogo deve indirizzare l'uso "personale" di questi oggetti in modo consapevole e critico per far sì che questo uso rimanga coerente rispetto alla disciplina di riferimento. D'altra parte, come afferma Zan (1998): «Si può riconoscere che nella formazione delle convinzioni ha una notevole responsabilità il tipo di insegnamento ricevuto».

2. Un caso particolare del paradosso di Duval: gli enti primitivi della geometria

Sempre a sostegno dell'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche analizziamo il famoso paradosso di Duval (1993) (citato in D'Amore 1999a e 2003): «(…) da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile».

Questa confusione si amplifica per gli enti primitivi della geometria, dato che vengono spesso definiti in modo improprio dagli insegnanti stessi o lasciati ad altri contesti d'uso (Sbaragli, 2003).

Inoltre, a complicare l'apprendimento di questi oggetti matematici, si aggiunge la scelta di fornire all'allievo solo sterili e univoche rappresentazioni convenzionali che, come abbiamo rilevato, vengono così accettate ciecamente dall'allievo.

Il paradosso prosegue così: «E, al contrario, come possono essi (i soggetti) acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica ed attività concettuale e se si considera le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche» (Duval, 1993; D'Amore, 2003).

Rileggiamo il paradosso nel caso del punto matematico: noi auspichiamo come insegnanti che lo studente concepisca il punto matematico in modo concettuale, pensandolo come oggetto privo di dimensione, ma è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Sicuramente i soggetti in fase di apprendimento tenderanno a confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche, ma questo avviene a maggior ragione quando le rappresentazioni fornite risultano quasi esclusivamente univoche e convenzionali, come nel caso del punto e della retta, e quando non avviene da parte dell'insegnante un lavoro di mediazione tra l'"oggetto personale" e l'"oggetto istituzionale". Le difficoltà sono infatti legate al fatto che gli studenti non possono avere inizialmente un apprendimento concettuale degli oggetti matematici, ma sono amplificate dalla rivelazione che spesso questo apprendimento concettuale non è posseduto neanche dagli insegnanti che tendono a confondere la rappresentazione con l'oggetto matematico che intendono spiegare ai propri allievi.

Il paradosso di Duval risulta quindi ancora più accentuato se l'insegnante fa coincidere il concetto con la sua rappresentazione e se non ha mai riflettuto e strutturato la trasposizione didattica tenendo conto del senso e dell'importanza delle rappresentazioni semiotiche.
Le considerazioni fin qui riportate, sono intimamente collegate con la problematica dei concetti figurali presentata da Fischbein (1993): «Un quadrato non è un'immagine disegnata su un foglio di carta; è una forma controllata dalle sue definizioni (anche se può essere ispirata da un oggetto reale). (…) Tutte le figure geometriche rappresentano costruzioni mentali che possiedono, simultaneamente, proprietà concettuali e figurali. (…) Idealmente, è il sistema concettuale che dovrebbe controllare completamente i significati, le relazioni e le proprietà delle figure. (…) L'evoluzione di un concetto figurale generalmente non è un processo naturale. Di conseguenza, uno dei compiti principali della didattica della matematica (nel campo della geometria) è di creare situazioni didattiche che richiedano sistematicamente una stretta cooperazione tra i due aspetti, fino alla loro fusione in oggetti mentali unitari».

È sulla base di queste premesse che sosteniamo l'importanza della strutturazione di attività che puntano a valorizzare e a mettere in evidenza per gli enti primitivi della geometria, varie rappresentazioni semiotiche in registri diversi, lasciando sbizzarrire la fantasia degli allievi al fine di farli allontanare da falsi stereotipi ormai assunti come convenzionali.
La varietà di rappresentazioni permetterà agli allievi di "purificare" l'oggetto dalle proprietà che non gli sono proprie come: la forma, la pesantezza, il colore, la dimensione per poi indirizzarli verso i saperi "istituzionali".
Didatticamente è sufficiente stabilire una posizione nello spazio per caratterizzare un punto, mentre alla rappresentazione di questa posizione ci penseranno gli allievi con la loro fantasia, la loro volontà, il loro gusto, rappresentando il punto matematico come l'estremo di una freccia, o l'incrocio di due segmenti, o il centro di una stellina…
Lo scopo è di far sì che l'allievo sia in grado di "osare" inventando rappresentazioni diverse per lo stesso concetto; questo consentirà allo studente di effettuare *trattamenti,* ossia di passare da una rappresentazione ad un'altra all'interno dello stesso registro semiotico

per lo stesso oggetto matematico, e di effettuare *conversioni* tra una rappresentazione ed un'altra in registri semiotici diversi: «Si può dire di più: che la conoscenza "è" l'intervento e l'uso dei segni. Dunque, Il meccanismo di produzione e d'uso, soggettivo ed intersoggettivo, di questi segni e di rappresentazione degli "oggetti" dell'acquisizione concettuale, è cruciale per la conoscenza» (D'Amore, 2003).
Se è vero, come sostiene Duval (1993), che la creazione e lo sviluppo di sistemi semiotici nuovi è simbolo (storico) di progresso della conoscenza, con queste attività noi vogliamo attivare questo progresso all'interno della classe, facendo rientrare in queste attività il "rischio personale" da parte dell'allievo, il suo impegno, la sua *implicazione* diretta nell'apprendimento, che si manifesta con la rottura del contratto didattico: *«La necessità di questa rottura potrebbe essere riassunta dal seguente aforisma: Credimi, dice il maestro all'allievo, osa utilizzare il tuo proprio sapere e imparerai»* (Sarrazy, 1995).

Bibliografia

Arrigo G., D'Amore B. (1999). "Lo vedo ma non ci credo...". Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 22B, 5, p. 465-494.

Arrigo G., D'Amore B. (2002). "Lo vedo ma non ci credo...", seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica.* 1, p. 4-57.

Brousseau G. (1980a). Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laryngologie, otologie, rhinologie*. 101. 3-4, p. 107-131.

Brousseau G. (1980b). L'échec et le contrat. *Recherches en didactique des mathématiques.* 41, p. 177-182.

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques.* 7, 2, p. 33-115.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche antropologique.

Recherches en didactique des mathématiques. 12, 1, p. 73-112.
D'Amore B. (1999a). *Elementi di Didattica della Matematica.* Bologna: Pitagora. III ed. 2001.
D'Amore B. (1999b). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 22A, 3, p. 247-276.
D'Amore B. (2001). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La Matematica e la sua didattica*. 1, p. 4-30.
D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica.* Pitagora: Bologna.
D'Amore B. (2004). Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica.* 4, p. 4-30.
D'Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*. 2. In corso di stampa.
Duval R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives.* 1. p. 7-25.
Duval R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives.* 1. p. 57-74.
Duval R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives.* 1. p. 235-253.
Duval R. (1993). Registres de Répresentations sémiotiques et Fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives.* 5. p. 37-65.
Duval R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques.* 16, 3, p. 349-382. [Trad. it. *La matematica e la sua didattica.* 3, 1996, 250-269].
Duval R. (1998). Signe et object (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre répresentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives.* 6. p. 139-163.
Fischbein E. (1985a). Intuizione e pensiero analitico nell'educazione matematica. In: Chini Artusi L. (ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base.* Bologna: Zanichelli-UMI. p. 8-19.

Fischbein E. (1985b). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In: Chini Artusi L. (ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base.* Bologna: Zanichelli-UMI, p. 122-132.

Fischbein E. (1992). Modelli taciti e ragionamento matematico. In: Fischbein E., Vergnaud G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. A cura di B. D'Amore. Bologna: Pitagora, p. 25-38.

Fischbein E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics.* 24, p. 139-162.

Godino J. D. (1993). La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática. *Quadrante.* 2, 1, p. 9-22.

Godino J., Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objectos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 14, 3, p. 325-355. [Traduz. italiana Bologna: Pitagora, 1999, come libro nella collana: Bologna-Querétaro].

Porlán Atiza R., Martin del Pozo R., Martin Toscano J., Rivero Garcia A. (1996). Conocimiento profesional deseable y profesores innovadores. *Investigación en la Escuela*. 29, p. 23-37.

Sarrazy B. (1995). Le contrat didactique. *Revue française de pédagogie*. 112, p. 85-118. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica.* (1998). 2, p. 132-175].

Sbaragli S. (2003). La scoperta dell'importanza del contesto: il punto nei diversi ambiti. *Bollettino dei Docenti di Matematica.* Bellinzona (Svizzera). 47, p. 49-58.

Sbaragli S. (2004). Le convinzioni degli insegnanti sull'infinito matematico. *Tesi di Dottorato di ricerca.* Versione in italiano e in inglese nel sito: http://math.unipa.it/~grim/tesi_it.htm

Sbaragli S. (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica.* 1, p. 57-71.

Speranza F. (1992). Tendenze empiriste nella Matematica. *Quaderni di Epistemologia della Matematica*. CNR, Progetto TID-FAIM. 10, p. 77-88. [Ristampato in: Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora, p. 57-64].

Zan R. (1998). *Problemi e convinzioni.* Bologna: Pitagora.